

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ АНАЛОГИЙ ДЛЯ СОЗДАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРИВОДЕ

Семернин А.Н., Солдатенков А.С., Анисимова З.Г.

БГТУ им. В.Г. Шухова, г. Белгород

Аннотация

Рассматривается электромеханическая система и способ её исследования на основе построения имитационной модели. Указаны сложности математического описания связанные с обменом энергией между механической и электрической частями системы, и при преобразовании энергии в каждой из этих частей. На примере электрической и механической системы рассматривается математическое описание их работы, приводятся аналогии между механическими и электрическими величинами. С помощью понятия прямой и инверсной системы электромеханических аналогий показано, что механические элементы могут быть представлены различными электрическими величинами. Применительно к электрическому приводу обоснованы связи магнитных величин с механическими аналогами. Показана аналогия между силой тока и угловой скоростью, энергией магнитного поля и кинетической энергией вращающегося тела, коэффициентом самоиндукции и моментом инерции. Делается вывод о способах воздействия на эти величины с целью их изменения. На основе анализа уравнений рассмотренных систем сделан вывод, не смотря на физические различия, электрические и механические элементы описываются одним видом дифференциального уравнения и имеют одинаковые динамические свойства, что позволяет представить электромеханическую систему в виде типовых динамических звеньев. Такой подход позволяет перейти от физической модели к математической и применить программу имитационного моделирования для её изучения. Это упрощает задачу исследования динамических свойств системы в вещественной и частотной области.

Ключевые слова: электрический привод, электромеханическая аналогия, математическая модель, потенциальная и кинетическая энергия, вращающийся момент, передаточная функция, имитационное моделирование, типовое динамическое звено, структурная схема.

APPLICATION OF ELECTROMECHANICAL ANALOGIES SYSTEMS TO CREATE MATHEMATICAL MODELS IN ELECTRIC DRIVES

Andrey N. Semernin, Alexey S. Soldatenkov, Zinaida G. Anisimova

Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov, Belgorod

Abstract

An electromechanical system and a method for studying it based on constructing a simulation model are considered. The difficulties of the mathematical description associated with the exchange of energy between the mechanical and electrical parts of the system, and with the transformation of energy in each of these parts, are indicated. Using the example of an electrical and mechanical system, a mathematical description of their operation is considered, and analogies between mechanical and electrical quantities are given. Using the concept of direct and inverse systems of electromechanical analogies, it is shown that mechanical elements can be represented by various electrical quantities. In relation to the electric drive, the connections between magnetic quantities and mechanical analogues are substantiated. An analogy is shown between current strength and angular velocity, magnetic field energy and kinetic energy of a rotating body, self-



induction coefficient and moment of inertia. A conclusion is drawn about ways to influence these quantities in order to change them. Based on the analysis of the equations of the considered systems, it was concluded that, despite the physical differences, electrical and mechanical elements are described by one type of differential equation and have the same dynamic properties, which allows us to represent the electromechanical system in the form of typical dynamic links. This approach allows you to move from a physical model to a mathematical one and use a simulation program to study it. This simplifies the task of studying the dynamic properties of the system in the real and frequency domains.

Keywords: *electric drive, electromechanical analogy, mathematical model, potential and kinetic energy, torque, transfer function, simulation modeling, typical dynamic link, block diagram*

Электрический привод – управляемая электромеханическая система, позволяющая преобразовывать электрическую энергию в механическую или наоборот.

Конструкция электропривода состоит из механических и электрических элементов. К механическим элементам конструкции относятся, например, рабочий механизм, механическое передаточное устройство, ротор электрического двигателя. Эти элементы обладают массой, жесткостью и энергией упругодеформируемого тела. К электрическим элементам относятся устройство управления, преобразующее устройство, электрический двигатель, источник электрической энергии [1].

Электромеханическая система обладает как механической, так и электромагнитной энергией которые сосредоточены в механической и электрической частях.

Исследование статических и динамических свойств электромеханических систем выполняют на математических моделях в пакетах прикладных программ компьютерного моделирования [2].

С математической точки зрения процессы в электромагнитных цепях описываются теми же видами дифференциальных уравнений, что и в механических элементах конструкции электрического привода. Это дает возможность проводить аналогии между механическими и электромагнитными величинами при описании электромеханической системы.

Математическое описание подобных систем представляет сложности, связанные с тем, что обмен энергией и преобразование энергии происходит не только между механической и электромагнитной частями системы, но и внутри каждой из этих частей. Так в электромагнитной системе, состоящей из катушки индуктивности и конденсатора энергия переходит из магнитной $W_M = \frac{Li^2}{2}$ в электрическую $W_M = \frac{q^2}{2C}$. В механической системе состоящей из упругих и демпфирующих элементов механическая энергия переходит из потенциальной $E_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2}$ в кинетическую $E_{\text{п}} = \frac{mv^2}{2}$.

Активное электрическое сопротивление действует аналогично вязкому сопротивлению (трению), что приводит в электромеханической системе к выделению тепловой энергии и как следствие к затуханию механических и электрических колебаний, возникающих в системе под действием внешних управляющих и возмущающих величин.

Простейшая электрическая цепь (рис. 1), состоящая из соединенных последовательно индуктивности, емкости и активного сопротивления, описывается уравнением вида [3]:

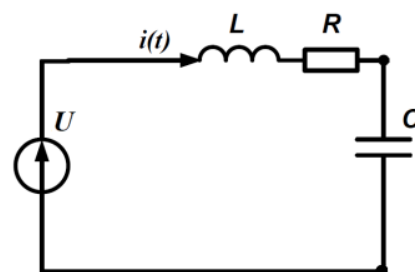


Рис. 1. Электрическая система с последовательно соединенными элементами



$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int idt = U \tag{1}$$

где U – напряжение источника питания; $L \frac{di}{dt}$ – э.д.с. самоиндукции катушки индуктивности; Ri – падение напряжения на активном сопротивлении; $\frac{1}{C} \int idt$ – напряжение на емкости.

Выразим ток, протекающий в электрической цепи через электрический заряд $i = \frac{dq}{dt}$. Получим уравнение 1 в виде:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = U \tag{2}$$

Приведем для рассмотренной электрической цепи механическую аналогию [4].

Механическая система с одной степенью свободы представлена на рис. 2. Под действием приложенной силы F в движение приводится масса M , которая перемещается вдоль линейной координаты x . Механическая система обладает коэффициентом жесткости C (пружина) и коэффициентом сопротивления B (демпфер).

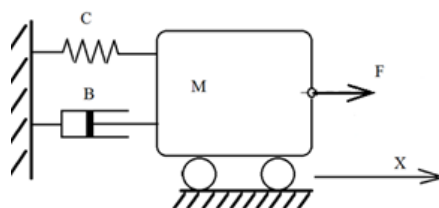


Рис. 2. Механическая система с одной степенью свободы

Если считать пружину и демпфер линейными элементами с постоянными коэффициентами C и B , и система не подвергается действию внешних возмущающих воздействий, тогда её работу можно описать уравнением вида

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + Cx = F \tag{3}$$

Из уравнений (1)-(3) следует, что электрическая и механическая системы описываются одним видом дифференциального уравнения 2-го порядка (табл. 1). Из чего следуют аналогии между электрическими и механическими величинами.

Таблица 1

Электромеханические аналогии

Механическая система	Электрическая система
Координата $x(t)$	Заряд $q(t)$
Масса M	Индуктивность L
Жесткость пружины C	Емкость $1/C$
Коэффициент сопротивления B	Сопротивление R
Сила F	Напряжение U
Скорость $v (dx/dt)$	Ток i
Ускорение $a (\frac{d^2x}{dt^2})$	Скорость изменения тока (di/dt)



Следует отметить, что для установки аналогий используют различные сопоставления электрических и механических величин. Для этого применяют первую (прямую) и вторую (инверсную) систему электромеханических аналогий. Если механическая система представлена последовательным соединением электрических элементов – прямая аналогия. Если работа механической системы описывается параллельной электрической цепью – инверсная аналогия. Первая система аналогий была предложена Релеем. Вторая система аналогий предложена Хенле и Файерстоном [5]. В этой системе применяют следующие аналогии:

масса → емкость; коэффициент трения → активная проводимость; сила → ток,

и т.д.

Следовательно, один и тот-же механический элемент электромеханической системы может быть представлен разными электрическими величинами.

В электрическом приводе актуальны связи магнитных величин с механическими аналогами. Так, например, при торможении электрических двигателей распространен электродинамический способ торможения, основанный на взаимодействии вращающегося ротора с постоянным магнитным полем статора.

Рассмотрим взаимодействие движущихся (вращающихся) тел с постоянным магнитным полем.

Известно, что магнитный поток противодействует попыткам его увеличения или уменьшения (изменения), что характерно для механических тел вращения и связано с их моментом инерции. Кинетический процесс в электрической цепи может быть выражен через скорость изменения электрического заряда dq/dt проходящего через поперечное сечение проводника, т.е. через силу тока i .

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (4)$$

Рассмотрим механический аналог электрической цепи, заключающийся во вращении ω твердого тела 1 вокруг неподвижной оси x , проходящей через его центр инерции (рис. 3).

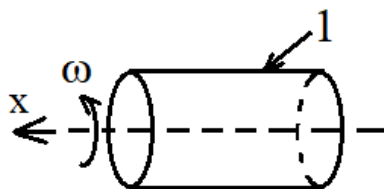


Рис. 3. Вращение тела вокруг оси, проходящей через центр инерции

Скорость вращения тела представляет собой производную по времени от угла поворота φ .

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (5)$$

Рассмотренные явления характеризуются скоростью происходящих процессов, что дает возможность сопоставить соотношения 4 и 5, сравнить электрическую цепь с механической системой.

Электрическая цепь и механическая система обладают запасом энергии, благодаря совершающемуся в них движению.



Энергию магнитного поля вокруг проводника можно выразить через индуктивность контура L и квадрат силы тока [6].

$$W_M = \frac{1}{2} L \cdot i^2 \quad (6)$$

Энергия магнитного потока в изотропной среде с постоянной магнитной проницаемостью может быть записана в виде:

$$W_M = \frac{1}{2} \int_v BHdv \quad (7)$$

где вектор магнитной индукции \mathbf{B} и вектор напряженности магнитного поля \mathbf{H} совпадают по направлению.

Приравняв 6 и 7 для энергии потока самоиндукции запишем:

$$\frac{1}{2} L \cdot i^2 = \frac{1}{2} \int_v BHdv \quad (8)$$

Из выражения 8 следует, что энергия потока равна магнитной энергии, носителем которой является поток самоиндукции.

С другой стороны, кинетическая энергия вращающегося тела зависит от момента инерции J

$$W_k = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2 \quad (9)$$

Сравнивая выражения 6 и 9 можно провести аналогию между электрическими и механическими величинами.

Силе тока i соответствует угловая скорость ω , коэффициенту самоиндукции L соответствует момент инерции J , энергии потока самоиндукции W_M соответствует кинетическая энергия W_k . Поток самоиндукции $\Phi = Li$ соответствует моменту количества движения $J\omega$.

В механической системе и в электрической (магнитной) цепи момент количества движения и поток самоиндукции стремятся сохранить свою величину.

Если в механической системе изменить момент количества движения, воздействуя на неё внешним вращающим моментом M , со стороны инерции системы появится противодействие движению системы. Это противодействие приведет к возникновению в системе реакции в форме возникновения внутреннего вращающегося момента $M_{вн}$ равного по величине и обратного по знаку внешнему моменту M .

Внутренний вращающий момент $M_{вн}$ обусловлен силами инерции и определяется выражением.

$$M_{вн} = - \frac{d(J\omega)}{dt} \quad (10)$$

В электромагнитной системе попытка изменить магнитный поток Φ приводит к возникновению электромагнитной реакции, в виде электродвижущей силы самоиндукции e_M противоположенной по знаку магнитному потоку.

$$e_M = - \frac{d(Li)}{dt} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (11)$$



Электродвижущая сила самоиндукции по форме и принципу действия тождественна вращающему моменту.

Если магнитный поток начинает изменяться по величине, например, при изменении силы тока в электрическом контуре, возникает электродвижущая сила самоиндукции. Если:

$$\frac{d\Phi}{dt} > 0, \text{ то } e_M < 0$$

По аналогии в механической системе при отсутствии внешних факторов, тормозящих вращение тела (трение среды) внешний вращающий момент

$$M = \frac{d(J\omega)}{dt} = -M_{\text{вн}}$$

расходуется на преодоление сил инерции системы. Если внешний вращающий момент встречает противодействие со стороны сопротивления среды или трения, тогда часть этого момента расходуется на преодоление внешних усилий, а оставшаяся часть на преодоление инерции самой вращающейся системы.

Следовательно, в механической системе для изменения момента количества движения и полной остановки вращения тела, необходимо создать сопротивление среды с целью рассеяния кинетической энергии, подобно тому, как в электромагнитной системе с помощью резисторов в проводящем контуре можно уменьшить магнитный поток до нуля.

Математическое описание линейных электромеханических систем и их элементов выполняется алгебраическими или дифференциальными уравнениями, отражающими физические процессы, протекающие в элементах. Анализ уравнений на основании рассмотренных систем аналогий позволяет сделать вывод о том, что различные электрические и механические элементы имеют одинаковые динамические свойства и описываются одними видами уравнений. Это позволяет представить электромеханическую систему в виде типовых динамических звеньев [7], что упрощает анализ работы системы в вещественной и частотной области. При этом один элемент электромеханической системы может быть представлен не одним, а двумя или более динамическими звеньями. Удобным средством для описания динамических свойств элементов служат передаточные функции, позволяющие представить работу электромеханической системы в виде структурной схемы. В табл. 2. приведено несколько типовых звеньев, с помощью которых можно охарактеризовать работу электрических и механических элементов электромеханической системы.

Работу электрической (рис. 1) и механической (рис. 2) системы можно представить в виде колебательного звена с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1} \quad (12)$$

Имитационная модель представлена в виде структурной схемы на рис. 4.

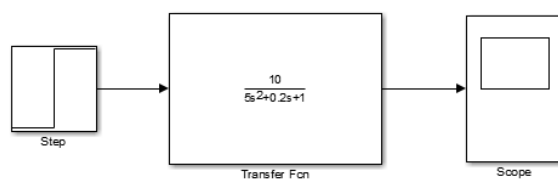


Рис. 4. Имитационная модель



Таблица 2

**Типовые звенья электрических и механических элементов
электрохимической системы**

Типовое звено	Уравнение	Передаточная функция	Примеры электрических и механических элементов
Усилительное	$y(t) = kx(t)$	$W(s) = k$	Механический редуктор, потенциометр, П-регулятор
Интегрирующее	$y(t) = k \int_0^t x(t) dt$	$W(s) = \frac{k}{s}$	Маховик, идеальная индуктивность, И-регулятор
Инерционное (апериодическое)	$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$	$W(s) = \frac{k}{Ts + 1}$	RL – электрическая цепь, эл. двигатель, термометр сопротивления (датчик температуры)
Колебательное	$T^2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$	$W(s) = \frac{k}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1}$	RLC – цепь, механический амортизатор, маятник, ДПТ

В программах имитационного моделирования, например MatLab Simulink, SimInTech выполняются динамические исследования системы. На вход системы подается типовое входное воздействие ($1(t)$ – функция, $\delta(t)$ – функция, единичный гармонический сигнал), а на выходе получаем реакцию системы в виде временных или частотных характеристик.

Выводы

1. Рассмотрена методика описания работы механической и электрической системы в виде дифференциальных уравнений.
2. Приведены аналогии между электрическими и механическими величинами. Дано понятие прямой и инверсной систем электрохимических аналогий.
3. На примере взаимодействия вращающегося тела с постоянным магнитным полем обоснованы аналогии между индуктивностью и моментом инерции, энергией потока самоиндукции и кинетической энергией, потоком самоиндукции и моментом количества движения.
4. На основе применения электрохимических аналогий, показан переход от электрической и механической системы к математической модели в виде структурной схемы с применением типового динамического звена.



Библиографический список

1. Дементьев Ю. Н., Чернышев А. Ю., Чернышев И. А. Электрический привод: Учебное пособие. – Томск: Изд. ТПУ, 2010. – 232 с.
2. Аристов А.В., Бурулько Л.К., Паюк Л.А. Математическое моделирование в электромеханике: Учебное пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2005. - 156 с.
3. Платоненков С.В., Лимонникова Е.В. Моделирование электромеханических систем в среде MATLAB: Учебное пособие. – Архангельск: Изд. САФУ, 2016. – 104 с.
4. Семернин А.Н., Аверкин Н.С. Особенности разработки вибрационного привода мобильного устройства // Научно-технические технологии и инновации. – Ч. 10. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2019. – С.115-119. EDN: [RJTXUH](#).
5. Римский-Корсаков А.В. Электроакустика. – М.: Связь, 1973. – 272 с.
6. Мишин Д.Д. Магнитные материалы: Учебное пособие. – М.: Высш. школа, 1981. – 335 с.
7. Усынин Ю.С. Теория автоматического управления: Учебное пособие для вузов. – Челябинск: ЮУрГУ, 2010. – 176 с.

References

1. Dementev, Iu. N., Chernyshev, A. Iu., & Chernyshev, I. A. (2010). *E'lektricheskij privod: Uchebnoe posobie* [Electric drive: Textbook]. Izd. TPU. [In Russian]
2. Aristov, A. V., Burulko, L. K., & Paiuk, L. A. (2005). *Matematicheskoe modelirovanie v e'lektromexanike: Uchebnoe posobie* [Mathematical Modelling in Electromechanics: Textbook]. Izd-vo TPU. [In Russian]
3. Platonenkov, S. V., & Limonnikova, E. V. (2016). *Modelirovanie e'lektromexanicheskix sistem v srede MATLAB: Uchebnoe posobie* [Modelling of electromechanical systems in MATLAB environment: Tutorial]. Izd. SAFU. [In Russian]
4. Semernin, A. N., & Averkin, N. S. (2019). Osobennosti razrabotki vibracionnogo privoda mobil'nogo ustrojstva [Features of development of the vibrating drive of a mobile device]. *Naukoemkie tekhnologii i innovacii* (Part 10, pp. 115-119).: Izd-vo BGTU. [In Russian]
5. Rimskii-Korsakov, A. V. (1973). *E'lektroakustika* [Electroacoustics]. Svyaz'. [In Russian]
6. Mishin, D. D. (1981). *Magnitny'e materialy: Uchebnoe posobie* [Magnetic Materials: Textbook]. Vy'sshfya. shkola. [In Russian]
7. Usynin, Iu. S. (2010). *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya: Uchebnoe posobie dlya vuzov* [Theory of Automatic Control: Textbook for Universities]. YuUrGU. [In Russian]

Сведения об авторах

Семернин Андрей Николаевич, канд. техн. наук, кафедра Электроэнергетики и автоматизации, БГТУ им. В.Г. Шухова, г. Белгород. SPIN-код: [8489-8963](#).

Солдатенков Алексей Сергеевич, канд. техн. наук, кафедра Электроэнергетики и автоматизации, БГТУ им. В.Г. Шухова, г. Белгород. SPIN-код: [6439-2981](#).

Анисимова Зинаида Григорьевна, старший преподаватель кафедры Электроэнергетики и автоматизации, БГТУ им. В.Г. Шухова, г. Белгород.

Authors about

Andrey N. Semernin, Cand. of Tech. Sciences (PhD), Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov.

Alexey S. Soldatenkov, Cand. of Tech. Sciences (PhD), Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov.

Zinaida G. Anisimova, senior lecturer, Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov.

