УДК 537.21
DOI: 10.34031/ES.2025.4.14

Секция Молодых ученых
Электроэнергетика и электротехника

УЧЕБНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО РАСЧЁТУ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ ВОКРУГ РАВНОМЕРНО ЗАРЯЖЕННОГО ОТРЕЗКА, ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННОГО В ПРОСТРАНСТВЕ

Степанова М.М.
Научный руководитель: канд. техн. наук, доц. Шмелёв В.Е.
ВлГУ им. А.Г и Н.Г. Столетовых, г. Владимир

Аннотация
Разработан учебно-исследовательский вычислительный сценарий для расчёта распределения скалярного электрического потенциала и напряжённости электрического поля вокруг равномерно заряженного отрезка прямой, произвольно расположенного в пространстве. Точка наблюдения также произвольно расположена в пространстве. Решение получено посредством векторного анализа без применения геометрических построений. Результирующие выражения для расчёта распределения электростатического поля записано по правилам векторной алгебры инвариантно по отношению к выбору системы координат. Вычислительный эксперимент проводился в декартовой системе. Существующее решение этой частной электростатической задачи также обобщено на случай произвольного пространственного положения отрезка и точки наблюдения. Тождественность существующего и полученного в данной работе решения не представляется очевидной и подтверждена авторами достаточно большой серией вычислительных опытов со случайными исходными геометрическими данными. Учебно-исследовательский анализ частных случаев электростатических полей представляется актуальной задачей подготовки специалистов в области электроэнергетики и электротехники. Предложенный сценарий планируется применять на практических занятиях и в самостоятельной работе студентов электроэнергетического направления подготовки по теоретическим основам электротехники (раздел «электростатика»).

Ключевые слова: *напряжённость электрического поля, скалярный электрический потенциал, электростатика, векторный анализ, вычислительный эксперимент.*

AN EDUCATIONAL AND RESEARCH COMPUTATIONAL EXPERIMENT TO CALCULATE THE DISTRIBUTION OF AN ELECTROSTATIC FIELD AROUND A UNIFORMLY CHARGED SEGMENT ARBITRARILY LOCATED IN SPACE

Mariya Stepanova
Supervisor: Cand. of Tech. Sc. (PhD in Eng.), Associate Professor Vyacheslav Shmelev
Vladimir State University named after A.G. & N.G. Stoletov, Vladimir

Abstract
An educational and research computational scenario has been developed for calculating the distribution of scalar electric potential and electric field strength around a uniformly charged straight line segment arbitrarily located in space. The observation point is also arbitrarily located in space. The solution is obtained by vector analysis without the use of geometric constructions. The resulting expressions for calculating the distribution of the electrostatic field are written according to the rules of vector algebra invariantly with respect to the choice of the coordinate system. The computational experiment was conducted in a Cartesian system. The existing solution to this particular electrostatic problem is also generalized to the case of an arbitrary spatial position of a segment and an observation point. The identity of the existing solution and the one obtained in this work is not obvious and is confirmed by the authors with a fairly large series of computational experiments with random initial geometric data. The educational and research analysis of

particular cases of electrostatic fields seems to be an urgent task of training specialists in the field of electric power engineering and electrical engineering. The proposed scenario is planned to be applied in practical classes and in the independent work of students of the electric power engineering field of study in the theoretical foundations of electrical engineering (section "Electrostatics").

Keywords: *electric field strength, scalar electric potential, electrostatics, vector analysis, computational experiment.*

Введение

В настоящее время при изучении студентами предмета «Теоретические основы электротехники», а именно методов анализа электростатических полей приобретает важность обобщение частных решений на произвольное расположение исследуемых объектов в пространстве и проведение вычислительных экспериментов с получаемыми и существующими расчётными формулами. Известные расчётные формулы распределения скалярного электрического потенциала и напряжённости электрического поля вокруг равномерно заряженного отрезка представлены в работе [1, с. 94 – 96]. Общепринятый подход к решению этой частной электростатической задачи – интегрирование фундаментального решения уравнения электростатики по всем точкам источника поля. Фундаментальное решение для точечного источника в бесконечной однородной среде представлено в многочисленной литературе, например, в [2, с. 35, 3, с. 31]. В работе [1] интегрирование фундаментального решения по заряженному отрезку проведено с применением геометрических построений и тригонометрических функций. Полученное там решение требует обобщения на произвольное расположение объектов в пространстве и приведения к виду, инвариантному по отношению к выбору системы координат. В данной работе представлены расчётные формулы, полученные по формальным правилам векторного анализа без геометрических построений. Тождественность полученной нами и представленной в [1] формул распределения скалярного электрического потенциала в данной работе проверена вычислительным экспериментом. Векторная расчётная формула для распределения напряжённости электрического поля, полученная в данной работе точно совпадает с пространственным обобщением формулы в [1]. Здесь вычислительным экспериментом проверяется свойство распределения напряжённости электрического поля, изложенное в [1] для проверки правильности полученной векторной формулы.

Постановка задачи и её решение

Пусть имеется электрически равномерно заряженный произвольно расположенный в пространстве отрезок прямой. Окружающая среда линейна и однородна по диэлектрическим свойствам в бесконечном пространстве (достаточно рассмотреть только вакуум). Требуется определить скалярный электрический потенциал $\varphi(Q)$ и вектор напряжённости электрического поля $\boldsymbol{E}(Q)$ в произвольной точке наблюдения Q.

На рис. 1 показаны случайно расположенные в пространстве заряженный отрезок (направленный отрезок $[P_1P_2]$, его начальная точка P_1 и конечная точка P_2) и точка наблюдения Q.

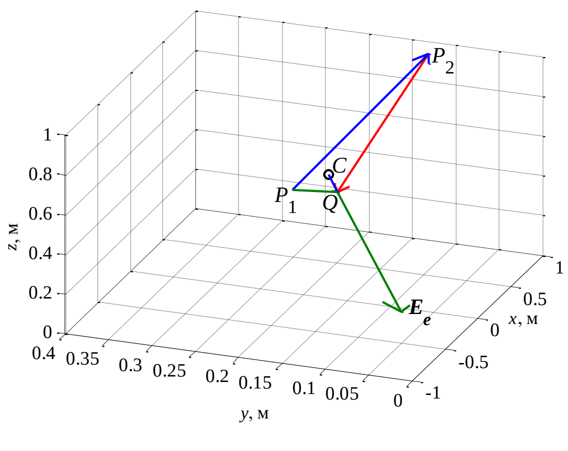

Рис. 1. Пример пространственного положения объектов анализируемой системы

Направленный отрезок $[P_1P_2]$ является образом вектора длины прямолинейного источника электростатического поля. На рис. 1 также показаны направленные отрезки $[P_1Q]$ и $[P_2Q]$ – образы векторов расстояний от граничных точек заряженного отрезка до точки наблюдения. В теоретической механике позиционирование в пространстве материальных точек принято представлять их «радиус-векторами», т.е. векторами расстояний от начала координат до них. Обозначим радиус-векторы исходных точек P_1, P_2 и Q соответственно $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$ и $\boldsymbol{R}_Q$.

Фундаментальным решением уравнения электростатики относительно скалярного электрического потенциала является его распределение вокруг точечного заряда в однородной бесконечной среде, поэтому исходная формула для получения искомого распределения от заряженного отрезка имеет вид

$$\varphi(Q) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \int_{P_1}^{P_2} \left|\boldsymbol{R}_Q - \boldsymbol{R}_P\right|^{-1} \cdot \mathrm{d}l_P\,, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{R}_P$ – радиус-вектор элемента (дифференциала) длины $\mathrm{d}l_P$ заряженного отрезка $[P_1P_2]$, ε_0 – физическая константа. Если окружающая среда – вакуум, то ε можно опустить. $|\boldsymbol{R}_Q\text{-}\boldsymbol{R}_P|$ – расстояние от точки источника поля $\mathrm{d}l_P$ до точки наблюдения Q. Интегрировать выражение (1) будем, раскладывая $\boldsymbol{R}_Q$ и $\boldsymbol{R}_P$ по ортам декартовой системы координат. Для этого введём обозначения: $\boldsymbol{R}_2\text{-}\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{L}$ – вектор длины заряженного отрезка, $L=|\boldsymbol{L}|$ – длина отрезка:

$$\boldsymbol{e}_L = \frac{\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1}{\left|\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1\right|} = \frac{\boldsymbol{L}}{L}, \quad \hat{e}_L = \boldsymbol{e}_L \otimes \boldsymbol{e}_L\,, \quad \hat{e}_n = \hat{1} - \hat{e}_L\,,$$

где $\boldsymbol{e}_L$ – единичный вектор направления заряженного отрезка, $\hat{e}_L$ – тензор второй валентности, выделяющий из вектора составляющую, сонаправленную с $\boldsymbol{e}_L$, $\hat{e}_n$ – тензор второй валентности, выделяющий из вектора составляющую, ортогональную $\boldsymbol{e}_L$ в плоскости (P_1P_2Q). Преобразование вектора (в данном случае выделение составляющей) осуществляется при внутреннем умножении тензора на вектор. $\otimes$ – знак внешнего умножения в векторной и тензорной алгебре.

С учётом введённых обозначений результат интегрирования выражения (1) в векторной форме, если опустить математические выкладки, примет вид:

$$\varphi(Q) = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \left(\frac{\left|\boldsymbol{R}_Q - \boldsymbol{R}_1\right| + \left(\boldsymbol{R}_Q - \boldsymbol{R}_1\right)\cdot \boldsymbol{e}_L}{\left|\boldsymbol{R}_Q - \boldsymbol{R}_2\right| + \left(\boldsymbol{R}_Q - \boldsymbol{R}_2\right)\cdot \boldsymbol{e}_L} \right), \tag{2}$$

где τ – линейная плотность электрического заряда.

В [1] получен другой вид формулы для расчёта распределения скалярного электрического потенциала:

$$\varphi_\Gamma(Q) = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \left(\frac{\left|\boldsymbol{R}_Q - \boldsymbol{R}_1\right| + \left|\boldsymbol{R}_Q - \boldsymbol{R}_2\right| + L}{\left|\boldsymbol{R}_Q - \boldsymbol{R}_1\right| + \left|\boldsymbol{R}_Q - \boldsymbol{R}_2\right| - L} \right). \tag{3}$$

Тождественность выражений (2) и (3) не является очевидной. Авторы данной статьи не ставили перед собой задачу математически строгого доказательства тождественности (2) и (3). Чтобы убедиться в расчётной эквивалентности формул (2) и (3), проведён вычислительный эксперимент (достаточно большая серия расчётных опытов) при случайном исходном задании положений точек P_1, P_2 и Q.

Вторая половина поставленной задачи – получить векторную расчётную формулу для пространственного распределения напряжённости электрического поля $\boldsymbol{E}(Q)$. Решить эту половину задачи можно двумя путями. Первый – применение пространственного дифференциального оператора первого порядка (минус градиента) к выражению (2) или (3). Второй – интегрирование вдоль заряженного отрезка пространственного распределения векторного выражения для распределения напряжённости электрического вокруг точечного электрического заряда [4, с. 23]. Таким образом, исходное соотношение для получения формулы расчёта распределения вектора напряжённости электрического поля вокруг заряженного отрезка имеет вид

$$\boldsymbol{E}(Q)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\cdot\int_{P_1}^{P_2}\frac{\boldsymbol{R}_Q-\boldsymbol{R}_P}{\left|\boldsymbol{R}_Q-\boldsymbol{R}_P\right|^3}\cdot \mathrm{d}l_P\cdot \tag{4}$$

Результат интегрирования выражения (4) в векторной форме, если опустить математические выкладки, принимает вид:

$$\boldsymbol{E}(Q)=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\cdot\left(\left(\left|\boldsymbol{R}_Q-\boldsymbol{R}_2\right|^{-1}-\left|\boldsymbol{R}_Q-\boldsymbol{R}_1\right|^{-1}\right)\cdot\boldsymbol{e}_L+\frac{\hat{e}_n\cdot\left(\boldsymbol{R}_Q-\boldsymbol{R}_1\right)}{\left|\hat{e}_n\cdot\left(\boldsymbol{R}_Q-\boldsymbol{R}_1\right)\right|^2}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left(\frac{\left(\boldsymbol{R}_Q-\boldsymbol{R}_1\right)\cdot\boldsymbol{e}_L}{\left|\boldsymbol{R}_Q-\boldsymbol{R}_1\right|}-\frac{\left(\boldsymbol{R}_Q-\boldsymbol{R}_2\right)\cdot\boldsymbol{e}_L}{\left|\boldsymbol{R}_Q-\boldsymbol{R}_2\right|}\right)\right). \tag{5}$$

Если формулы для $\boldsymbol{E}(Q)$, представленные в [1], обобщить на произвольное расположение в пространстве точек P_1, P_2 и Q и преобразовать в векторную форму, то получится формула (5). В (1) описано важное свойство распределения $\boldsymbol{E}(Q)$: в любой точке наблюдения вектор напряжённости электрического поля направлен в продолжение биссектрисы плоского угла, образованного отрезками $[P_1Q]$ и $[P_2Q]$. В данной статье серией вычислительных опытов подтверждается это свойство $\boldsymbol{E}(Q)$.

Результаты

По формулам (1) – (5) разработан учебно-исследовательский вычислительный сценарий расчёта распределения электростатического поля вокруг равномерно заряженного отрезка. Входные геометрические данные (пространственные положения точек P_1, P_2 и Q) формируются генератором случайных чисел с равномерным законом распределения. 3D декартовы координаты названных трёх точек лежат в пределах от 0 до 1 м. Линейная плотность заряда задана равной 1 нКл/м. Физические величины, характеризующие поле в точке наблюдения Q, рассчитываются по формулам (2), (3), (5). Для проверки вычислительной эквивалентности формул (2) и (3) находится разность $\varphi(Q)$ и $\varphi_Г(Q)$, которая выражается в машинных эпсилонах по отношению $\varphi(Q)$ (вес младшего двоичного разряда мантиссы $\varphi(Q)$).

В ходе вычислительного эксперимента свойство [1] распределения $\boldsymbol{E}(Q)$ проверялось следующим образом. В аналитической геометрии и векторной алгебре есть теорема о том, что радиус-вектор пересечения биссектрис треугольника – это средневзвешенная величина радиус-векторов вершин треугольника. Веса – длины противолежащих сторон. На рис.1 это точка C. Для проверки коллинеарности векторов $[CQ]$ и $\boldsymbol{E}(Q)/|\boldsymbol{E}(Q)|$ их векторное произведение рассчитано и выражено в машинных эпсилонах по отношению к длине отрезка $[CQ]$.

В 117 вычислительных испытаниях модуль разности $|\varphi(Q)-\varphi_Г(Q)|$ не превысил 14 машинных эпсилонов (восьмибайтовый числовой тип данных арифметики с плавающей точкой), а в подавляющем большинстве испытаний не превышал 8 машинных эпсилонов. Таким образом, экспериментально подтвердилась вычислительная эквивалентность формул (2) и (3) (расхождения не превышают ошибок округления в машинной арифметике с плавающей точкой). В этих же 117 испытаниях компоненты векторного произведения $[CQ]$ и $\boldsymbol{E}(Q)/|\boldsymbol{E}(Q)|$ не превысили 25 машинных эпсилонов (нарушение коллинеарности в пределах ошибок округления).

Таким образом, вычислительный эксперимент показал правильность полученных расчётных соотношений. Вычислительный сценарий показывает также 3D графическое изображение объектов (направленный заряженный отрезок, векторы расстояния от концов отрезка до точки наблюдения, точку пересечения C биссектрис треугольника P_1P_2Q, векторы $[CQ]$ и $\boldsymbol{E}(Q)/|\boldsymbol{E}(Q)|$). 3D изображение можно прокручивать на экране, чтобы визуально убедиться в коллинеарности векторов $[CQ]$ и $\boldsymbol{E}(Q)$.

Обсуждение

Результаты вычислительного эксперимента подтверждают правильность вывода формул для распределения $\varphi(Q)$ и $\boldsymbol{E}(Q)$, если заряженный отрезок и точка наблюдения произвольно расположены в пространстве. Практическая ценность вывода этих формул заключается в том, что она может быть положена в основу для вывода формул распределения электростатического поля вокруг равномерно заряженного треугольника, произвольно расположенного в пространстве, над чем в настоящее время ведётся работа. Последняя нужна для аналитического расчёта распределения электростатического поля внутри и вокруг равномерно поляризованного тетраэдра и магнитостатического поля равномерно намагниченного тетраэдра. А это уже позволит при численной реализации корректно избавиться от сингулярности пространственных интегральных уравнений электростатики и магнитостатики при моделировании электромагнитных устройств с открытыми граничными условиями.

Вывод

Представленная в данном докладе аналитическая разработка и основанный на её основе вычислительный сценарий позволяет обучаемым студентам лучше понять основные положения теории электромагнитного поля (раздел «Электростатика»).

Библиографический список

1. **Говорков В.А.** Электрические и магнитные поля. – М: Энергия, 1968. – 488 с.
2. **Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л.** Теоретические основы электротехники: В 3 томах. – Том 3. – СПб.: Питер, 2009. – 364 с.
3. **Шмелёв В.Е., Сбитнев С.А.** Теоретические основы электротехники. Теория электромагнитного поля: Учеб. пособие. –Владимир: ВлГУ, 2003. – 88 с.
4. **Шмелёв В.Е., Сизова А.Н.** Вычислительный сценарий для изучения теоретических основ электротехники, раздел «электростатика», расчёт сил в системе точечных зарядов// Молодёжь, наука, инновации: актуальные вопросы современности: сб. ст. III Межд. научно практ. конф. – Пенза: Наука и Просвещение, 2021. – С. 22-24. EDN: ROTTPU.

Сведения об авторах

Степанова Мария Михайловна – студентка 3 курса бакалавриата по направлению 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника.

Ссылки для цитирования

Степанова М.М. Учебно-исследовательский вычислительный эксперимент по расчёту распределения электростатического поля вокруг равномерно заряженного отрезка, произвольно расположенного в пространстве // Энергетические системы. – 2025. – № 4. – С. 113-117.

Stepanova M. (2025). An educational and research computational experiment to calculate the distribution of an electrostatic field around a uniformly charged segment arbitrarily located in space. *Energy Systems, 4*, 113-117. https://doi.org/10.34031/es.2025.4.14